МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра МИС и ПО

Методические указания
к выполнению контрольной работы №1 по теме:
"Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной"
по дисциплине **"Математика "**
для направления
19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания
направленности/специализации
Технология продукции и организация ресторанного дела
для обучающихся очной формы обучения

Мурманск
2020 г.

Оглавление

Введение.

Методические указания к выполнению контрольной работы содержат задания на выполнение КР**№1 " Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной"** по дисциплине **"Математика "**, а также решение примерного варианта КР.

Контрольная работа по дисциплине выполняется в соответствии с учебным планом по специальности/направлению.

Целью КР являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины. Необходимо, чтобы обучающийся мог использовать полученные знания на практике.

Приступая к выполнению, обучающийся должен ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями.

КР должна быть выполнена и представлена в срок, установленный кафедрой.

При выполнении задания необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В работе должен быть указан номер варианта работы.
2. Вариант каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки. Самовольная замена одного варианта задания другим не разрешается.
3. Перед решением задания должно быть приведено его условие.
4. Решение задания следует сопровождать развернутыми расчетами и пояснениями.
5. Выполненная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями по оформлению письменных работ.
6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, а также выполнить все рекомендации.
7. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом письменным работам, к экзамену не допускаются.
8. Работы, выполненные не по своему варианту, рецензированию не подлежат.

Задания для выполнения

КР №1 "Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной"

Задача 1. Вычислить пределы, применяя правила раскрытия неопределенностей, основные теоремы о конечных пределах, теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях. Ответы пояснить с точки зрения определения предела.

№ варианта	Пределы
1	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-n^2}{n^2+5n-2},\quad n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{3x+1}-5}{x^2-8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(\sin\sqrt{x})}{e^{3x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+1}\right)^{-x^3}$.
2	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+7n^2+n-1}{6n^2+3n},\quad n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-8x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{\sin\sqrt{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{x+2}$.
3	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2}{3n^4-10},\quad n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+5x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{\ln(1+2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x-6}\right)^{3-x}$.
4	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+4n-1}{n^2-9n},\quad n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(3x-x^2)}{5^{1-x^2}-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x-5}$.
5	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-n^2+3n-4}{n^3+12n^2+5n+3},\quad n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{2x^2-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{\arcsin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x+2}\right)^{x^2}$.
6	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12+n+n^2}{7n+25},\quad n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x^2-3x-4}$;

	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x\cdot\sin x)}{4^{3x}-4^{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3}\right)^{x}$.
7	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-1}{n^2+4n+4}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{2-x^2}-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{\cos 3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+2}{8x+5}\right)^{x-4}$.
8	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-10n+3}{1-2n}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x-4}}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\operatorname{arctg}\sqrt{5x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2+9}{x^3+9}\right)^{-x}$.
9	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+12n-1}{n^2+3}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-5x-9}{x+\sqrt{5x+6}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin\left(x^3\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x-5}\right)^{x^2+1}$.
10	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+n^3+3n}{2n^4-n^2-n^5}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-4}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^{3x}-1)}{\ln(1+2x^3)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x+1}$.

Задача 2. Исследовать непрерывность функций в соответствии с заданиями.

а) Проверить, является ли функция $y=f(x)$ непрерывной в точках x_1 и x_2. В случае разрыва функции указать тип разрыва и сделать схематический чертеж в окрестности точки разрыва.

б) Построить график функции $y=f(x)$, используя график, записать промежутки непрерывности функции, перечислить точки разрыва и указать тип каждого из них.

№ варианта	а)	б)
1	$y=12^{\frac{1}{x-4}}$, $x_1=4$, $x_2=5$	$f(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ 2-x, & 0\le x\le 1,\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$

2	$y = 8^{\frac{1}{2x-3}}$, $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2$	$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 2, \\ 3 - x, & x \ge 2 \end{cases}$
3	$y = 10^{\frac{2}{5-x}}$, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$	$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \le 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$
4	$y = 5^{\frac{3}{1-x}}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ 2x - 1, & -1 \le x \le 2, \\ 3, & x > 2 \end{cases}$
5	$y = 9^{\frac{1}{4x-2}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \mathrm{tg} x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ -x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$
6	$y = 7^{\frac{3}{2-x}}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$	$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$
7	$y = 3^{\frac{2}{x-3}}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$	$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$
8	$y = 16^{\frac{1}{3-x}}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$	$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 0, \\ x^2 - 2, & 0 \le x < 2, \\ 2, & x \ge 2 \end{cases}$
9	$y = 2^{\frac{1}{x-1}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ -2, & 0 \le x \le 1, \\ 2x - 4, & x > 1 \end{cases}$
10	$y = 6^{\frac{3}{2x+1}}$, $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1$	$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1, \\ -1, & 1 \le x < 2, \\ 3 - x, & x \ge 2 \end{cases}$

Задача 3. Найти производную y'_x:

№ варианта	Функции		
	а)	б)	в)

1	$y=\dfrac{2x-\mathrm{arctg}5x}{1+\ln 3x}$	$3y^2+4xy-5x^2\sin y=0$	$\begin{cases}x=t^2\cdot e^{3t},\\ y=t\cdot e^{-t}\end{cases}$
2	$y=\dfrac{(2x+1)\cdot \mathrm{tg}3x}{\sin(x-1)}$	$x^2e^y+2xy-6x=0$	$\begin{cases}x=\sqrt{1+3t^2},\\ y=\dfrac{1}{3t^2+1}\end{cases}$
3	$y=\dfrac{2x\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}}{(3x-2)^5}$	$3xy-x\cos y+2x^3=0$	$\begin{cases}x=\arcsin 3t,\\ y=\ln(1-9t^2)\end{cases}$
4	$y=\dfrac{2x^3-\cos 4x+3}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\sin y+xy^2-5x^3=0$	$\begin{cases}x=t\cdot \mathrm{ctg}2t,\\ y=2\sqrt{t^5}-3t\end{cases}$
5	$y=\dfrac{\sin(\ln 2x)+3x}{1-2^{5x}}$	$4xy-x^3\cdot\sqrt{y}-x^5=0$	$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\cos 5t},\\ y=\mathrm{tg}5t-4\end{cases}$
6	$y=\dfrac{e^{-2x}-3x^2+1}{\cos(1-5x)}$	$y\sin x+x^3y^3-3x=0$	$\begin{cases}x=\ln t\cdot(t+1),\\ y=\dfrac{1}{2}t^2+t\end{cases}$
7	$y=\dfrac{x\cdot\cos 3x}{\sqrt[4]{3-2x^2}}$	$xy^2-\ln y+3x^2=0$	$\begin{cases}x=\dfrac{1}{(t+1)^2},\\ y=\dfrac{t-4}{t+1}\end{cases}$
8	$y=\dfrac{\mathrm{tg}3x-2x^3}{\sqrt{1-5x}}$	$xy^2-2x\mathrm{ctg}y-7x=0$	$\begin{cases}x=t\cdot\sin 2t,\\ y=t-\cos t\end{cases}$
9	$y=\dfrac{2x^2-x\cdot\sin x}{2x-5}$	$3x^4e^{2y}-xy+6x^2=0$	$\begin{cases}x=2t-\ln^2 t,\\ y=\dfrac{t^2-1}{t}\end{cases}$
10	$y=\dfrac{x^2-x\cdot\mathrm{arctg}2x}{2x+x^2-1}$	$5x^5y^3-x\mathrm{tg}y-2x=0$	$\begin{cases}x=\arccos t,\\ y=2+\sqrt{1-t^2}\end{cases}$

Задача 4. Дана функция $y=f(x)$ и значение x_0.

№ варианта	Функция	Точка
1	$y=\ln\dfrac{2-x}{x^3}$	$x_0=1$
2	$y=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$x_0=4$
3	$y=e^{3x}(x+1)$	$x_0=0$

4	$y=\ln(2x^2-2x-3)$	$x_0=2$
5	$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	$x_0=1$
6	$y=x-2\operatorname{arctg}x+1$	$x_0=0$
7	$y=\arcsin 3x+3$	$x_0=0$
8	$y=\dfrac{\ln x+1}{x+1}$	$x_0=1$
9	$y=\sqrt[3]{2-x^3}$	$x_0=1$
10	$y=e^{\sin 2x}$	$x_0=0$

Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Построить графики функции, касательной и нормали в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$.

Задача 5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

№ варианта	Пределы	
	а)	б)
1	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x\cdot\sin 3x}$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12x+5}{\sqrt{3x-4}}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}x}{\ln(5x-4)}$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+7x)}{4x+3}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 6x-1}{e^{2x}-2x-1}$
4	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5x+2}}{e^{2x-3}+1}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-x}{x^3}$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{1-x}+7x}{4x-6}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$
6	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+3)}{\sqrt{2x+3}}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-e^{x-2}-5}{x^2+x-6}$
7	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5x+4)^2+2x}{\ln(7x-4)}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\cos 2x-(\sin 4x)^2}$
8	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+3}{5x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)-x+2}{\sin(\pi\cdot x)}$

9	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+4}}{\ln(x^3+4)}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x+\cos x}{\mathrm{ctg}3x+2x-\pi}$
10	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+3}{e^{2x-9}+4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3x-1}{\ln(x+1)+2x}$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы:

№ варианта	Интегралы
n	$а)\int\dfrac{x^{n+1}}{x^{n+2}-2n+9}dx$; $б)\int((n+1)x+1)\ln\big((11-n)x\big)dx$; $в)\int\dfrac{x+n+1}{x^3+(11-n)x}dx$; $г)\int\dfrac{dx}{(11-n)\sin x+(n+1)\cos x}$

В примерах $а), б), в)$ правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

Задача 7. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

№ варианта	Интегралы
n	$а)\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{arctg}^{\,n+1}\left(\dfrac{x}{11-n}\right)}{x^2+(11-n)^2}dx$; $б)\int\limits_0^{11-n}\dfrac{dx}{(11-n-x)^{\frac{1}{2n+1}}}$

Задача 8. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной в ДСК линиями l_1 и l_2;

№ варианта	
n	$l_1:\ y=2nx^2$; $l_2:y=(n^2-8)x+4n$

Задача 9. Вычислить с помощью определенного интеграла объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями l_1 и l_2. Сделать чертеж.

№ варианта	Уравнения линий
n	$l_1:y=(11-n)x^2$; $l_2:\ y=\dfrac{11n-n^2}{2}x$

Задача 10. Вычислить с помощью определенного интеграла длину дуги кривой, заданной в ДСК уравнением $y = f(x)$, где $x\in[a;b]$.

№ варианта	Уравнение кривой	Промежуток
n	$y = n + \frac{2}{3(n+1)}\sqrt{x^3}$	$x \in \left[0;\, 3(n+1)^2\right]$

Решение примерного варианта КР №1

Задача 1. Вычислить пределы, применяя правила раскрытия неопределенностей, основные теоремы о конечных пределах, теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях. Ответы пояснить с точки зрения определения предела.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2n-3n^3}{2n^2-3}, \quad n \in N$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{e^{x^2}-e^x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{1-2x}$.

Задача 2. Исследовать непрерывность функций в соответствии с заданиями.

а) Проверить, является ли функция $y = 4^{\frac{1}{x-3}}$ непрерывной в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. В случае разрыва функции указать тип разрыва и сделать схематический чертеж в окрестности точки разрыва.

б) Построить график функции $f(x) = \begin{cases} x^2-3, & x<0, \\ x+1, & 0 \le x \le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x>4; \end{cases}$ используя график, записать промежутки непрерывности функции, перечислить точки разрыва и указать тип каждого из них.

Задача 3. Найти производную y'_x:

а) $y = \frac{x \cdot e^{-2x} + 3\,\mathrm{tg}x}{1+\sin 4x}$; б) $2x^5y^2 - x\ln y + 4x = 0$; в) $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y = \sqrt{1-4t^2} + 1. \end{cases}$

Задача 4. Дана функция $y = 3x + \ln\cos x + 2$ и значение $x_0 = 0$. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой x_0. Построить графики функции, касательной и нормали в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$.

Задача 5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{\ln(5x-2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+e^{x}-2}{(\sin 3x)^2}$.

Задача 7. Найти неопределенные интегралы:

$a)\int\dfrac{15x^{18}}{x^{19}+6}dx$, $б)\int(13x+1)\ln(14x)dx$, $в)\int\dfrac{x+11}{x^3+12x}dx$, $г)\int\dfrac{dx}{12\sin x+13\cos x}$.

В примерах $а), б), в)$ правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

Задача 8. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

$$а)\int\limits_{13}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+169)\mathrm{arctg}^2\dfrac{x}{13}},\qquad б)\int\limits_{0}^{13}\frac{dx}{(x-13)^{\frac{1}{27}}}.$$

Задача 9. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной в ДСК линиями l_1: $y=x^2+1$ и l_2: $y=2x+4$;

Задача 10. Вычислить с помощью определенного интеграла объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями l_1: $y=2x^2$ и l_2: $y=6x$. Сделать чертеж.

Задача 11. Вычислить с помощью определенного интеграла длину дуги кривой, заданной в ДСК уравнением $y=3+8\sqrt{x^3}$, где $x\in[0;\,2{,}5]$.

Решение задачи 1а.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n-3n^3}{2n^2-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{2}{n^2}-3\right)}{n^2\left(2-\dfrac{3}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{2}{n^2}-3\right)}{2-\dfrac{3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{бб}{огр}=\lim_{n\to\infty}бб=\infty$$

.

Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ при $n\to\infty$ использовано правило 1: в числителе и знаменателе вынесены за скобки старшие степени n. При вычислении предела учтено, что при $n\to\infty$ $\dfrac{1}{n^2}\to 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty}const=const$, использованы теоремы о конечных пределах и теорема о бесконечно больших функциях:

$$\frac{бб}{огр} = бб \cdot огр = бб \text{, если } огр \neq бм .$$

С точки зрения определения бесконечного предела последовательности $u_n = \dfrac{1+2n-3n^3}{2n^2-3}$, $n \in N$ полученный результат $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ означает, что для достаточно больших значений номера n члены последовательности u_n становятся сколь угодно большими по модулю.

Решение задачи 1б.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})}{(x^2+x-6)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{5-x})^2}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} = \lim_{x\to 2} \frac{1+x-5+x}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} = 2\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} =$$

$$= 2\frac{1}{5(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \frac{2}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}} .$$

Здесь для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ использовано правило 2: в числителе и знаменателе выделен критический множитель (x –2). Для его выделения в знаменателе использовано разложение многочлена на множители, а в числителе – домножение числителя и знаменателя на выражение $\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x}$, сопряженное числителю $\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}$. При вычислении предела использованы теоремы о конечных пределах.

С точки зрения определения предела функции $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6}$ при $x \to 2$ полученный результат $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$ означает, что для значений аргумента x, достаточно близких к точке x = 2, значения функции будут становиться сколь угодно близкими к числу $\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$.

Решение задачи 1в.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{e^{x^2}-e^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -0}\frac{2\sin^2(2x)}{e^x(e^{x^2-x}-1)}=\left\{\begin{array}{l}\text{используем замены эквивалентных } \textit{бм}:\\ \sin z\sim z \text{ при } z\to 0\Rightarrow \sin^2(2x)\sim(2x)^2=4x^2 \text{ при } x\to 0\\ e^z-1\sim z \text{ при } z\to 0\Rightarrow e^{x^2-x}-1\sim(x^2-x) \text{ при } x\to 0\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{e^x(x^2-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{e^x(x-1)x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x(x-1)}=\frac{0}{1(0-1)}=0\,.$$

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ использовано правило 2: в числителе и знаменателе выделен критический множитель $(x – 0) = x$. Для его выделения использован принцип замены эквивалентных бесконечно малых.

С точки зрения определения конечного предела функции $y=f(x)=\frac{1-\cos 4x}{e^{x^2}-e^x}$ при $x\to 0$ полученный результат $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ означает, что для значений аргумента x, достаточно близких к точке $x = 0$, значения функции будут становиться сколь угодно сколь угодно близкими к числу 0.

Решение задачи 1г.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{1-2x}=\left(1^\infty\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{сводим ко второму замечательному}\\ \text{пределу } \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e\end{array}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2)+5}{x-2}\right)^{1-2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right)^{\frac{5}{(x-2)}\cdot(1-2x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(1-2x)}{(x-2)}}=e^{-10}\,.$$

При вычислении предела использовано дважды правило раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, образованной делением целых многочленов одинаковой степени :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{1}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5(1-2x)}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-10x+5}{x-2}=\frac{-10}{1}=-10\,,$$

а также непрерывность функции e^z: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{z(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} z(x)}$.

С точки зрения определения конечного предела функции $y=f(x)=\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$ при $x\to\infty$ полученный результат $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e^{-10}$ означает, что для достаточно больших (по модулю) значений аргумента x значения функции будут сколь угодно близкими к числу e^{-10}.

Ответы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n-3n^3}{2n^2-3}=\infty,\quad n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6}=\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{e^{x^2}-e^{x}}=0$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{1-2x}=e^{-10}$.

Решение задачи 2а.

Чтобы проверить непрерывность заданной функции $y=4^{\frac{1}{x-3}}$ в каждой из заданных точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$, используем определение непрерывности функции в точке.

Найдем ООФ: $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. Проверим выполнение условий непрерывности функций поочередно в точках x_1 и x_2.

Точка $x_1 = 0$:

1) $x_1 = 0\in$ООФ $y = 4^{\frac{1}{x-3}}$, причем окрестность точки x_1 также входит в ООФ;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_1} y=\lim\limits_{x\to 0} 4^{\frac{1}{x-3}}=4^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$;

3) справедливо $y(x_1)=4^{\frac{1}{x-3}}\Big|_{x=0}=4^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}=\lim\limits_{x\to x_1} y$;

следовательно, в точке $x_1 = 0$ заданная функция непрерывна.

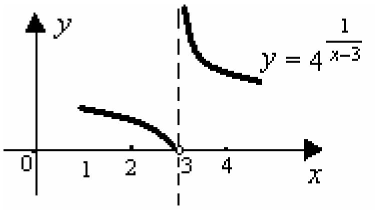
Точка $x_2 = 3$:

1) $x_2 = 3\notin$ООФ $y = 4^{\frac{1}{x-3}}$, следовательно, в точке $x_2 = 3$ заданная функция не является непрерывной. Поскольку функция определена в окрестности точки x_2, то эта точка является точкой разрыва функции.

Чтобы определить тип разрыва, вычислим односторонние пределы функции при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to x_2-0} y=\lim_{x\to 3-0} 4^{\frac{1}{x-3}}=\left(4^{-бб}\right)=0;\quad \lim_{x\to x_2+0} y=\lim_{x\to 3+0} 4^{\frac{1}{x-3}}=\left(4^{+бб}\right)=+\infty$$

(при вычислении использовано предельное поведение показательной функции $y=4^{z}$ при $z\to\pm\infty$). Так как один из односторонних пределов оказался бесконечным, делаем вывод, что разрыв в точке $x_2 = 3$ бесконечный (разрыв 2-го рода).



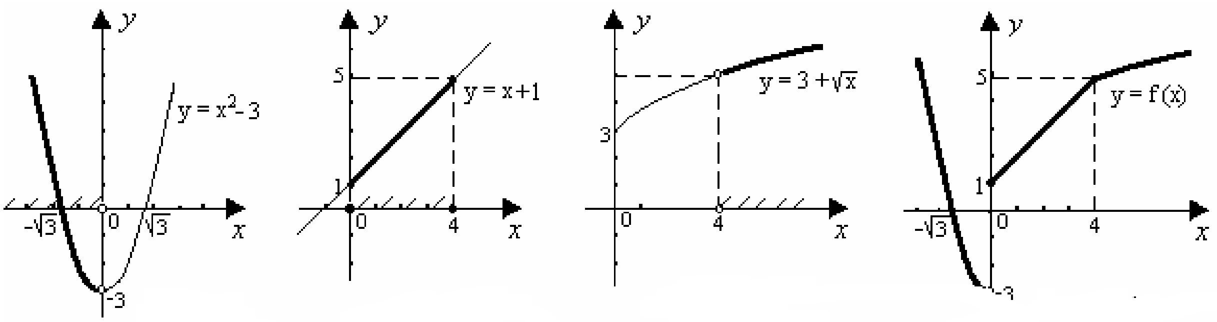
Построим схематический чертеж графика функции в окрестности точки разрыва с учетом значений односторонних пределов .

Решение задачи 2б.

Запишем ООФ кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 3, \ \ x < 0, \\ x + 1, \ \ 0 \le x \le 4, \\ 3 + \sqrt{x}, \ \ x > 4: \end{cases} \qquad x \in (-\infty;\, 0) \cup [0;\, 4] \cup (4;\, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \text{ООФ}: x \in (-\infty;\, \infty).$$

Построим график функции $y = f(x)$, объединяя «куски» графиков основных элементарных функций $y = x^2 - 3, \ \ y = x + 1, \ \ y = 3 + \sqrt{x}$.



Анализируя график $y = f(x)$, видим, что он представляет собой непрерывную линию для всех x, кроме $x = 0$. Записываем промежутки непрерывности функции: $x \in (-\infty;\, 0)$ и $x \in (0;\, +\infty)$.

В точке $x = 0$ функция имеет разрыв типа «скачок», т.к. не существует $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, но при $x \to 0$ существуют конечные односторонние пределы функции, не совпадающие между собой:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x^2 - 3) = -3, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x + 1) = 1.$$

Ответы:

а) $x_1 = 0$ – точка непрерывности функции $y = 4^{\frac{1}{x-3}}$, $x_2 = 3$ – точка бесконечного разрыва функции, б) промежутки непрерывности функции: $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$, $x = 0$ – точка разрыва типа «скачок».

<u>Решение задачи 3а.</u>

Функция $y(x)$ задана в явном виде и является отношением двух функций: $y = \dfrac{x \cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x}{1+\sin 4x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

$$y'_x = \frac{(x \cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x)' \cdot (1+\sin 4x) - (x \cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x) \cdot (1+\sin 4x)'}{(1+\sin 4x)^2}.$$

Найдем производные ее числителя и знаменателя:

$$(x \cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x)' = x' \cdot e^{-2x} + x \cdot \left(e^{-2x}\right)' + 3 \cdot (\mathrm{tg}x)' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= (1-2x) \cdot e^{-2x} + \frac{3}{\cos^2 x}$$

$$(1+\sin 4x)' = 1' + (\sin 4x)' = 0 + \cos 4x \cdot 4 = 4\cos 4x$$

Теперь получаем: $y'_x = \dfrac{\left((1-2x) \cdot e^{-2x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right) \cdot (1+\sin 4x) - (x \cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x) \cdot 4\cos 4x}{(1+\sin 4x)^2}$.

Преобразование результата не производим, поскольку оно не дает существенного упрощения выражения для y'_x.

Решение задачи 3б.

Равенство $2x^5 y^2 - x\ln y + 4x = 0$ есть уравнение вида $F(x, y) = 0$, которое неявно задает функцию $y(x)$. Для нахождения y'_x продифференцируем обе части тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ по аргументу x и из полученного равенства

найдем y'_x как решение линейного уравнения:

$$2x^5 y^2(x) - x\ln(y(x)) + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x^5 y^2(x) - x\ln(y(x)) + 4x)'_x = (0)'_x \quad \Rightarrow$$

$$2 \cdot 5x^4 \cdot y^2(x) + 2x^5 \cdot 2y(x) \cdot y'_x - \ln(y(x)) - \frac{x}{y(x)} \cdot y'_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$10x^4 y^2 + 4x^5 y\, y'_x - \ln y - \frac{xy'_x}{y} + 4 = 0 \quad \Rightarrow 10x^4 y^3 + 4x^5 y^2\, y'_x - y\ln y - xy'_x + 4y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y'_x(4x^5y^2 - x) = y\ln y - 10x^4y^3 - 4y \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y\ln y - 10x^4y^3 - 4y}{4x^5y^2 - x}.$$

Производная неявно заданной функции y'_x зависит от аргумента x и функции y, поэтому в ответе нужно отразить их взаимосвязь:

$$y'_x = \frac{y\ln y - 10x^4y^3 - 4y}{4x^5y^2 - x}, \text{ где } 2x^5y^2 - x\ln y + 4x = 0.$$

Решение задачи 3в.

Функция $y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y = \sqrt{1-4t^2} + 1. \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\sqrt{1-4t^2}+1\right)'_t}{\left(\arcsin 2t - 3\right)'_t} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1-4t^2}}\cdot(-8t)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\cdot 2} = \frac{-4t\cdot\sqrt{1-4t^2}}{2\sqrt{1-4t^2}} = -2t \quad \Rightarrow \quad y'_x = -2t$$

Производная параметрически заданной функции также является функцией, заданной параметрически, поэтому записываем результат в параметрической форме: $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y'_x = -2t. \end{cases}$

Ответы:

а) $y'_x = \dfrac{\left((1-2x)\cdot e^{-2x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\cdot(1+\sin 4x) - (x\cdot e^{-2x} + 3tgx)\cdot 4\cos 4x}{(1+\sin 4x)^2}$;

б) $y'_x = \dfrac{y\ln y - 10x^4y^3 - 4y}{4x^5y^2 - x}$, где $2x^5y^2 - x\ln y + 4x = 0$;

в) $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y'_x = -2t. \end{cases}$

Решение задачи 4.

Найдем ординату точки касания: $y_0 = f(x_0) = 0 + \ln\cos 0 + 2 = \ln 1 + 2 = 2$.

Для вычисления угловых коэффициентов касательной и нормали найдем производную y'_x:

$$y = 3x + \ln\cos x + 2 \quad \Rightarrow \quad y' = 3 + \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' + 0 = 3 + \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = 3 - \mathrm{tg}x.$$

Вычислим угловой коэффициент касательной: $k_{кас.} = y'(x_0) = 3 - \mathrm{tg}0 = 3.$

Тогда угловой коэффициент нормали: $k_{норм.}=-\frac{1}{y'(x_0)}=-\frac{1}{3}$.

Запишем уравнение касательной в точке $M(0;\,2)$ по формуле и приведем его к виду общего уравнения прямой:

$$y-y_0=y'(x_0)\cdot(x-x_0)\quad\Rightarrow\quad y-2=3(x-0)\quad\Leftrightarrow\quad y=3x+2\quad\Leftrightarrow\quad 3x-y+2=0.$$

Запишем уравнение нормали по формуле и аналогично упростим его:

$$y-y_0=\frac{-1}{y'(x_0)}\cdot(x-x_0)\ \Rightarrow\ y-2=-\frac{1}{3}\cdot(x-0)\ \Leftrightarrow\ y=-\frac{1}{3}x+2\ \Leftrightarrow\ x+3y-6=0.$$

Ответы: $3x-y+2=0$ и $x+3y-6=0$.

Решение задачи 5а.

В данном пределе функция $\frac{1-2x}{\ln(5x-2)}$ при $x\to+\infty$ есть отношение двух бесконечно больших функций, т.е. при вычислении предела нужно устранить неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{\ln(5x-2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{Bmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{Bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2x)'}{(\ln(5x-2))'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\frac{1}{5x-2}\cdot 5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2(5x-2)}{5}.$$

Последний предел есть предел бесконечно большой функции, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2(5x-2)}{5}=-\frac{2}{5}\lim_{x\to+\infty}(5x-2)=-\frac{2}{5}\lim_{x\to+\infty}бб=-\infty.$$

Следовательно, исходный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{\ln(5x-2)}=-\infty$.

<u>**Решение задачи 5б.**</u>

В данном пределе функция $\frac{e^{-x}+e^{x}-2}{(\sin 3x)^2}$ при $x\to 0$ есть отношение двух бесконечно малых функций, т.е. при вычислении предела нужно устранить неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+e^{x}-2}{(\sin 3x)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{Bmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопит.}\end{Bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-x}+e^{x}-2)'}{((\sin 3x)^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+e^{x}}{2\sin 3x\cos 3x\cdot 3}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+e^{x}}{3\sin 6x}.$$

Последний предел при $x\to 0$ есть отношение двух бесконечно малых функций, т.е. нужно снова устранять неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Еще раз используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+e^{x}}{3\sin 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопит.}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-e^{-x}+e^{x}\right)'}{\left(3\sin 6x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+e^{x}}{3\cos 6x\cdot 6}=\frac{1+1}{3\cdot 1\cdot 6}=\frac{1}{9}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+e^{x}-2}{(\sin 3x)^2}=\dfrac{1}{9}$.

Ответы: а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-2x}{\ln(5x-2)}=-\infty$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+e^{x}-2}{(\sin 3x)^2}=\dfrac{1}{9}$.

Решение задачи 6.

а) Так как $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$, то получим:

$$\int\frac{15x^{18}}{x^{19}+6}\,dx=\frac{15}{19}\int\frac{19x^{18}}{x^{19}+6}\,dx=\frac{15}{19}\int\frac{(x^{19}+6)'dx}{x^{19}+6}=\frac{15}{19}\int\frac{d(x^{19}+6)}{x^{19}+6}=\frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right|+C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right|\right)'=\frac{15}{19}\frac{1}{x^{19}+6}\cdot(19\,x^{18})=\frac{15x^{18}}{x^{19}+6},$$

Ответ: $\int\frac{15x^{18}}{x^{19}+6}\,dx=\frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right|+C$.

б) Интеграл $\int(13x+1)\ln(14x)dx$ относится к типу интегралов, берущихся по частям; это интеграл так называемого второго типа.

$$\int(13x+1)\ln(14x)\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln(14x);\ du=\frac{1}{14x}\cdot 14dx=\frac{dx}{x};\\ dv=(13x+1)dx;\ v=\frac{13}{2}x^2+x\end{matrix}\right|=\left(\frac{13}{2}x^2+x\right)\ln(14x)-\int\left(\frac{13}{2}x^2+x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=(6{,}5x^2+x)\ln(14x)-\int(6{,}5x+1)dx=(6{,}5x^2+x)\ln(14x)-3{,}25x^2-x+C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left((6{,}5x^2+x)\ln(14x)-3{,}25x^2-x\right)'=(13x+1)\ln(14x)+\frac{(6{,}5x^2+x)14}{14x}-6{,}5x-1=$$

$$=(13x+1)\ln(14x)+6{,}5x+1-6{,}5x-1=(13x+1)\ln(14x).$$

Ответ: $\int(13x+1)\ln(14x)dx=(6{,}5x^2+x)\ln(14x)-3{,}25x^2-x+\mathrm{C}$.

в) Подинтегральная функция является правильной рациональной дробью, поэтому ее можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x+11}{x^3+12x}=\frac{x+11}{x(x^2+12)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+12},\ \text{отсюда}$$

$$x+11 \equiv A(x^2+12)+(Bx+C)x, \text{ или } \quad x+11 \equiv (A+B)x^2+Cx+12A.$$

Неопределенные коэффициенты A, B, C найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества:

$$\text{при } x^0: \quad 11=12A \quad \Rightarrow \quad A=11/12;$$
$$\text{при } x^1: \quad 1=C \quad \Rightarrow \quad C=1;$$
$$\text{при } x^2: \quad 0=A+B \quad \Rightarrow \quad B=-A=-11/12.$$

Коэффициенты A, B, C можно найти другим способом – подставляя в тождество «удобные» значения x (метод частных значений):

$$x=0: \quad 11=12A,$$
$$x=1: \quad 12=A+B+C+12A,$$
$$x=\text{-}1: \quad 10=A+B-C+12A.$$

Из первого уравнения получим: $A=11/12$. Почленно вычитая два последних равенства, получим: $2C=2 \Rightarrow C=1$, и из последнего уравнения

$$B=10-A+C-12A=-A=-11/12.$$

Таким образом, $A=11/12$, $B=-11/12$, $C=1$.

Переходим к интегрированию:

$$\int \frac{x+11}{x^3+12x}dx=\int\left(\frac{11/12}{x}+\frac{(-11/12)x+1}{x^2+12}\right)dx=\frac{11}{12}\int\frac{dx}{x}-\frac{11}{12}\int\frac{x}{x^2+12}dx+\int\frac{dx}{x^2+12}=$$
$$=\frac{11}{12}\ln|x|-\frac{11}{24}\ln(x^2+12)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}}+C.$$

Здесь использовано: $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+12}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+12}dx=\int\frac{d(x^2+12)}{x^2+12}=\ln\left|x^2+12\right|+C$,

$$\int\frac{dx}{x^2+12}=\int\frac{dx}{x^2+(2\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}}+C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{11}{12}\ln|x|-\frac{11}{24}\ln(x^2+12)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)'=\frac{11}{12x}-\frac{11(2x)}{24(x^2+12)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{11}{12x}-\frac{11x}{12(x^2+12)}+\frac{1}{12+x^2}=\frac{11(x^2+12)-11x^2+12x}{12x(x^2+12)}=\frac{12(11+x)}{12x(x^2+12)}=\frac{x+11}{x^3+12x}.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{x+11}{x^3+12x}dx=\frac{11}{12}\ln|x|-\frac{11}{24}\ln(x^2+12)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}}+C$.

г) Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\int\frac{dx}{12\sin x+13\cos x}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t; & x=2\operatorname{arctg} t; & dx=\frac{2dt}{1+t^2};\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; & & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{24t}{1+t^2}+13\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{2dt}{24t+13-13t^2}=-\frac{2}{13}\int\frac{dt}{t^2-\frac{24}{13}t-1}=-\frac{2}{13}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{12}{13}\right)^2-\frac{313}{169}}=$$

$$=-\frac{2}{13}\cdot\frac{13}{2\sqrt{313}}\ln\left|\frac{t-\frac{12}{13}-\frac{\sqrt{313}}{13}}{t-\frac{12}{13}+\frac{\sqrt{313}}{13}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{313}}\ln\left|\frac{13t-12-\sqrt{313}}{13t-12+\sqrt{313}}\right|+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\int\frac{dx}{12\sin x+13\cos x}=-\frac{1}{\sqrt{313}}\ln\left|\frac{13\operatorname{tg}\frac{x}{2}-12-\sqrt{313}}{13\operatorname{tg}\frac{x}{2}-12+\sqrt{313}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{313}}\ln\left|\frac{13\operatorname{tg}\frac{x}{2}-12+\sqrt{313}}{13\operatorname{tg}\frac{x}{2}-12-\sqrt{313}}\right|+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{12\sin x+13\cos x}=\frac{1}{\sqrt{313}}\ln\left|\frac{13\operatorname{tg}\frac{x}{2}-12+\sqrt{313}}{13\operatorname{tg}\frac{x}{2}-12-\sqrt{313}}\right|+C$.

Решение задачи 7.

а) Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода, поэтому

$$\int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+169)\operatorname{arctg}^2\frac{x}{13}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{13}^{b}\frac{dx}{(x^2+169)\operatorname{arctg}^2\frac{x}{13}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{13}\int_{13}^{b}\frac{d(\operatorname{arctg}\frac{x}{13})}{\operatorname{arctg}^2\frac{x}{13}}=$$

$$=-\frac{1}{13}\lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{13}}\right|_{13}^{b}\right)=-\frac{1}{13}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{b}{13}}-\frac{1}{\operatorname{arctg}1}\right)=-\frac{1}{13}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\frac{\pi}{4}}\right)=-\frac{1}{13}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\right)=\frac{2}{13\pi},$$

следовательно, интеграл сходится и равен $\frac{2}{13\pi}\approx 0{,}05$.

Здесь использовано: $\displaystyle\frac{dx}{x^2+169}=\frac{1}{169}\cdot\frac{dx}{\left(\frac{x}{13}\right)^2+1}=\frac{13}{169}\cdot\frac{d\left(\frac{x}{13}\right)}{\left(\frac{x}{13}\right)^2+1}=\frac{1}{13}\,d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{13}\right)$.

Ответ: интеграл $\displaystyle\int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+169)\operatorname{arctg}^2\frac{x}{13}}$ сходится и равен $\frac{2}{13\pi}\approx 0{,}05$.

б) Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода, т.к. x=13 – точка бесконечного разрыва подинтегральной функции. Поэтому

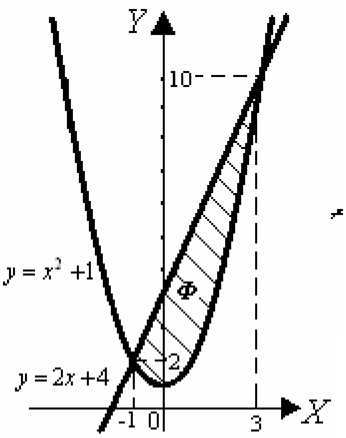
$$\int_0^{13}\frac{dx}{(x-13)^{\frac{1}{27}}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{13-\varepsilon}(x-13)^{-\frac{1}{27}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{27}{26}(x-13)^{\frac{26}{27}}\right)\Bigg|_0^{13-\varepsilon}=\frac{27}{26}\lim_{\varepsilon\to0}\left((13-\varepsilon-13)^{\frac{26}{27}}-(-13)^{\frac{26}{27}}\right)=$$

$$=\frac{27}{26}\lim_{\varepsilon\to0}\left((-\varepsilon)^{\frac{26}{27}}-(-13)^{\frac{26}{27}}\right)=-\frac{27}{26}(13)^{\frac{26}{27}}=-\frac{27}{26}\cdot13\cdot(13)^{-\frac{1}{27}}=-\frac{27}{2}(13)^{-\frac{1}{27}},$$

следовательно, интеграл сходится и равен $-\frac{27}{2}(13)^{-\frac{1}{27}}\approx-12{,}3$.

Ответ: интеграл $\int_0^{13}\frac{dx}{(x-13)^{\frac{1}{27}}}$ сходится и равен $-\frac{27}{2}(13)^{-\frac{1}{27}}\approx-12{,}3$.

Решение задачи 8.



а) Найдем точки пересечения кривых, для чего составим и решим систему $\begin{cases}y=x^2+1\\ y=2x+4\end{cases}$. Приравнивая правые части, получаем уравнение $x^2-2x-3=0$, решив которое, найдем абсциссы точек пересечения: $x=-1$, $x=3$.

Построим чертеж. На рисунке видно, что $f_2(x)=2x+4>x^2+1=f_1(x)$ на промежутке [–1; 3].

Вычислим площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$S_\Phi=\int_{-1}^{3}(2x+4-x^2-1)dx=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx=\left(x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=$$

$$=(9+9-9)-\left(1-3+\frac{1}{3}\right)=9+\frac{5}{3}=10\frac{2}{3}\approx10{,}7.$$

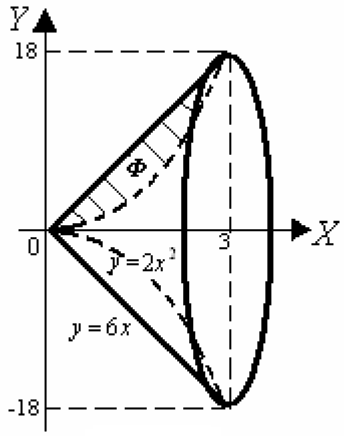
Ответ: $S_\phi = 10\dfrac{2}{3} \approx 10{,}7$ единиц площади.

Решение задачи 9.

Для построения фигуры *Ф*, ограниченной кривыми l_1 и l_2, нужно найти точки их пересечения, т.е. решить систему: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 6x \end{cases}$. Приравнивая правые части равенств, получаем уравнение $2x^2 - 6x = 0$, решив которое, найдем абсциссы точек пересечения кривых: $x = 0,\ x = 3$.

Объем тела вращения, полученного вращением фигуры *Ф* вокруг оси OX, можно найти как разность объемов двух тел по формуле :

$$V_x = V_2 - V_1 = \pi\int_0^3 f_2^{\,2}(x)dx - \pi\int_0^3 f_1^{\,2}(x)dx \quad \Rightarrow$$



$$V_x = \pi\int_0^3 (6x)^2 dx - \pi\int_0^3 \left(2x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^3 \left(36x^2 - 4x^4\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{36}{3}x^3 - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 = 129{,}6\pi\,.$$

Ответ: $V_x = 129{,}6\,\pi \approx 407{,}15$ единиц объема.

Решение задачи 10.

Кривая задана уравнением $y = f(x)$ где $x \in [0;\, 2{,}5]$, поэтому ее длина вычисляется по формуле: $l = \int\limits_0^{2,5} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

Для $f(x) = 3 + 8\sqrt{x^3}$ получаем: $f'(x) = 12\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 1 + (f'(x))^2 = 1 + 144x$,

тогда длина дуги кривой

$$l = \int_0^{2,5} \sqrt{1+144x}\,dx = \frac{2}{144\cdot 3}(1+144x)^{3/2}\Big|_0^{2,5} = \frac{1}{216}(361^{3/2} - 1) = \frac{6859-1}{216} = \frac{127}{4} = 31{,}75\,.$$

Ответ: $l = \frac{127}{4} = 31{,}75$ единиц длины.